Formes différentielles et analyse vectorielle

par Richard Gomez

Février 2012

1 Formes multilinéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$

Nous donnons ici une présentation rapide des formes multilinéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$.

1.1 Introduction

Définition 1. *Soit φ une forme p-linéaire sur $\mathbb{R}^n$. On dit que φ est alternée si pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_p$ et tous $X_1, ..., X_p \in \mathbb{R}^n$ on a*

$$\varphi(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)\, \varphi(X_1, ..., X_p)$$

On note $\Lambda^p\mathbb{R}^n$ l'ensemble des p-formes alternées sur $\mathbb{R}^n$ et on pose

$$\Lambda^0\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$$

On rappelle que $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ. On rappelle également que si φ est p-linéaire, on dit que φ est de degré p. On montre facilement que les assertions ci-dessous sont équivalentes :

i. La p-forme φ est alternée.
ii. Pour tous $X_1, ..., X_p \in \mathbb{R}^n$, le fait d'échanger deux vecteurs X_i et X_j change le signe de $\varphi(X_1, ..., X_p)$.
iii. Si $(X_1, ..., X_p)$ possède des répétitions, alors $\varphi(X_1, ..., X_p) = 0$.

On montre aussi que si φ est alternée de degré p et $(X_1, ..., X_p)$ est liée, alors $\varphi(X_1, ..., X_p) = 0$.

Exemple 2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. L'application qui à $(X_1, ..., X_n)$ associe le déterminant $\det_{\mathcal{B}}(X_1, ..., X_n)$ de ce n-uplet calculé dans $\mathcal{B}$, est n-linéaire alternée. Cette forme s'appelle produit mixte de $\mathbb{R}^n$. On gardera cet exemple en mémoire pour bien comprendre les formes alternées en général.

1.2 Produit extérieur

On vérifie aisément que tous les $\Lambda^p\mathbb{R}^n$ sont des espaces vectoriels et on pose

$$\Lambda\mathbb{R}^n = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \Lambda^p\mathbb{R}^n$$

Nous allons définir un produit sur cet espace, mais avant nous aurons besoin de la définition ci-dessous :

Définition 3. *(Produit extérieur de 1-formes) Soient $\omega_1, ..., \omega_p$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. On définit le produit de ces formes en posant*

$$\omega_1 \wedge ... \wedge \omega_p = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma)\, \omega_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes \omega_{\sigma(p)}$$

On rappelle que $\otimes$ désigne le produit tensoriel sur les formes multilinéaires : si φ et ψ sont des formes multilinéaires de degré p et q, respectivement, $\varphi \otimes \psi$ est la forme linéaire de degré $p + q$ définie par

$$(\varphi \otimes \psi)(X_1, ..., X_{p+q}) = \varphi(X_1, ..., X_p)\, \psi(X_{p+1}, ..., X_{p+q})$$

Le produit tensoriel est associatif, ce qui permet d'écrire $\omega_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \omega_{\sigma(p)}$ dans la définition précèdente.

Exemple 4. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soient $i_1, \ldots, i_p \in \{1, \ldots, n\}$ tels que

$$i_1 < \ldots < i_p$$

Alors

$$(e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_p}^*)(X_1, \ldots, X_p) = \begin{vmatrix} x_{i_1}^1 & \cdots & x_{i_1}^p \\ \vdots & & \vdots \\ x_{i_p}^1 & \cdots & x_{i_p}^p \end{vmatrix}$$

où $\left(x_1^j, \ldots, x_n^j\right)$ désignent les coordonnées de X_j. Ainsi, $e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_p}^*$ donne le déterminant de la projection canonique de $(X_1, \ldots, X_p)$ sur $\mathrm{Vect}\langle e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}\rangle$. Signalons au passage que la p-forme alternée $e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_p}^*$ est déterminée par le fait que

$$(e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_p}^*)(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) = 1$$

et

$$(e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_p}^*)(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}) = 0$$

si $\{j_1, \ldots, j_p\} \neq \{i_1, \ldots, i_p\}$.

Il y a des similitudes ici avec la définition 1 :

- le fait d'échanger deux 1-formes ω_i et ω_j oppose la p-forme $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p$;
- si $(\omega_1, \ldots, \omega_p)$ possède des répétitions, alors $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p = 0$;
- plus généralement, si $(\omega_1, \ldots, \omega_p)$ est liée, alors $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p = 0$.

On montre assez facilement la

Proposition 5. *On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$. Soit $p \geqslant 1$. Alors la famille*

$$(e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_p}^* ; 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant p)$$

est une base de $\Lambda^p \mathbb{R}^n$.

Nous allons utiliser cette base, dite naturelle, pour définir un produit sur $\Lambda \mathbb{R}^n$:

Définition 6. *On définit le produit extérieur sur $\Lambda \mathbb{R}^n$ comme le prolongement par linéarité du produit défini sur les 1-formes. On note $\wedge$ le produit extérieur sur $\Lambda \mathbb{R}^n$.*

On a par exemple :

$$(e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_p}^*) \wedge (e_{j_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{j_q}^*) = e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_1}^* \wedge e_{j_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{j_q}^*$$

et on rappelle que s'il y a des répétitions, le résultat est nul. On peut se ramener à la base naturelle en réordonnéant les facteurs de sorte que les indices de gauche à droite soient dans l'ordre croissant, à condition de multiplier le résultat par la signature de la permutation ainsi effectuée (autrement dit : on multiplie par -1 chaque fois que deux facteurs sont échangés). On a plus généralement

$$\left(\sum_{i_1 < \ldots < i_p} \lambda_{i_1, \ldots, i_p} e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_p}^*\right) \wedge \left(\sum_{j_1 < \ldots < j_p} \mu_{j_1, \ldots, j_q} e_{j_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{j_q}^*\right) = \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_p \\ j_1 < \ldots < j_q}} \lambda_{i_1, \ldots, i_p} \mu_{j_1, \ldots, j_q} e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_p}^* \wedge e_{j_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{j_q}^*$$

On prendra soin (dans le soucis de se ramener à un développement dans la base naturelle), d'éliminer tous les termes possédants des répétitions, de procéder à un réagencement des indices afin de les mettre dans l'ordre croissant, et de rassembler les termes selon les éléments de la base. On a clairement la

Proposition 7. *Le produit extérieur confère à l'espace vectoriel $\Lambda\mathbb{R}^n$ une structure d'algèbre.*

Il s'agit même d'une algèbre *graduée* puisque le degré d'un produit est la somme des degrés qui le composent.

Le produit extérieur n'est pas commutatif (on sait par exemple que la commutation de deux 1-formes multiplie par -1 le résultat), en revanche il vérifie la propriété ci-dessous :

$$\beta\wedge\alpha=(-1)^{\deg\alpha\deg\beta}\alpha\wedge\beta$$

On dit alors que le produit est anticommutatif.

Remarque 8. Cette manière de définir le produit extérieur a le mérite d'être rapide. Cependant elle a un défaut : elle est loin d'être intrinsèque. Elle a l'air de dépendre de la base chosie dans $\mathbb{R}^n$ (ici nous avons choisi la base canonique). On pourrait montrer qu'en fait le produit extérieur est indépendant de la base choisie. Il existe même une manière intrinsèque de définir le produit extérieur. Il s'agit d'une définition utilisant le produit tensoriel et l'antisymétrisation des formes multilinéaires. On pourra la consulter dans [?], par exemple. Nous avons opté pour la concision car notre but n'est pas de comprendre à fond l'algèbre extérieure, mais de savoir manipuler et calculer avec les formes alternées.

La proposition ci-dessous ne pose aucune difficulté :

Proposition 9. *Si α est une forme alternée de degré impair sur $\mathbb{R}^n$, alors $\alpha\wedge\alpha=0$.*

Exercice 1. Donner une forme alternée β sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\beta\wedge\beta\neq 0$.

1.3 Image réciproque d'une forme multilinéaire alternée

Définition 10. *Soient $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ une application linéaire et $\alpha\in\Lambda^p\mathbb{R}^m$. L'image réciproque de α par φ est la forme multilinéaire alternée $\varphi^*\alpha$ sur $\mathbb{R}^n$ définie par*

$$(\varphi^*\alpha)(X_1,\dots,X_p)=\alpha(\varphi(X_1),\dots,\varphi(X_p))$$

pour tous $X_1,\dots,X_p\in\mathbb{R}^n$.

Proposition 11. *Soit $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ une application linéaire. On définit l'application*

$$\begin{array}{rccc}\varphi^* & : \Lambda\mathbb{R}^m & \longrightarrow & \Lambda\mathbb{R}^n\\ & \alpha & \longmapsto & \varphi^*\alpha\end{array}$$

Alors

1. *L'application φ^* est linéaire.*
2. *Pour tous $\alpha,\beta\in\Lambda\mathbb{R}^m$, $\varphi^*(\alpha\wedge\beta)=\varphi^*\alpha\wedge\varphi^*\beta$*

Démonstration. La linéarité de φ^* est évidente. Passons au deuxième item. Notons $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)$ et $(e_1,\dots,e_n)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$, respectivement. Un calcul montre que pour tous $i_1,\dots,i_p\in\{1,\dots,m\}$ tels que $i_1<\dots<i_p$ on a

$$\varphi^*(\varepsilon_{i_1}^*\wedge\dots\wedge\varepsilon_{i_p}^*)=\sum_{j_1<\dots<j_p}|\Phi_{(i_1,\dots,i_p),(j_1,\dots,j_p)}|\,e_{j_1}^*\wedge\dots\wedge e_{j_p}^*$$

où Φ désigne la matrice de φ dans les bases canoniques, et $\Phi_{(i_1,\dots,i_p),(j_1,\dots,j_p)}$ la sous-matrice obtenue en gardant les lignes $i_1,\dots,i_p$ et les colonnes $j_1,\dots,j_p$. Un calcul analogue montre que

$$\varphi^*\varepsilon_{i_1}^*\wedge\dots\wedge\varphi^*\varepsilon_{i_p}^*=\sum_{j_1<\dots<j_p}|\Phi_{(i_1,\dots,i_p),(j_1,\dots,j_p)}|\,e_{j_1}^*\wedge\dots\wedge e_{j_p}^*$$

d'où il découle

$$\varphi^*(\varepsilon_{i_1}^*\wedge\dots\wedge\varepsilon_{i_p}^*)=\varphi^*\varepsilon_{i_1}^*\wedge\dots\wedge\varphi^*\varepsilon_{i_p}$$

On conclue alors grâce à la linéarité de φ^* et la proposition 5. □

Remarque 12. La démonstration de cette proposition a nécessité des calculs assez laborieux. Si on travaillait avec la définition intrinsèque du produit extérieur, la démonstration prendrait une ligne !

La proposition qui suit est évidente :

Proposition 13. *Soient* $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *et* $\psi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *des applications linéaires. Alors*

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$$

2 Notion de formes différentielles sur $\mathbb{R}^3$

Définition 14. *Soit* U *une partie de* $\mathbb{R}^n$*. Une forme différentielle de degré* p *sur* U *est une application*

$$\omega \ : \ U \longrightarrow \Lambda^p\mathbb{R}^n$$

On note $\Omega^p(U)$ *l'ensemble des* p*-formes différentielles sur* U*.*

On notera que les formes de degré 0 sont les fonctions :

$$\Omega^0(U) = \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$$

On montre facilement que les $\Omega^p(U)$ sont des espaces vectoriels réels. On pose

$$\Omega(U) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Omega^p(U)$$

D'après la proposition 5, si $\omega \in \Omega^p(U)$, il existe une famille $(f_{i_1,\ldots,i_p}; 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n)$ de fonctions définies sur U telles que pour tout $m \in U$,

$$\omega(m) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} f_{i_1,\ldots,i_p}(m)\, e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_p}^*$$

On écrit alors

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} f_{i_1,\ldots,i_p}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

Nous justifierons cette notation plus tard.

3 Classe d'une forme différentielle

Nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$ et nous considérons les éléments de cet espace comme des *points*. Lorsqu'un point se déplace dans $\mathbb{R}^n$, sa vitesse est un *vecteur*, or mathématiquement, un vecteur est aussi un élément de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont tantôt considérés comme des points, tantôt comme des vecteurs ! En géométrie différentielle on met fin à cette ambigüité en définissant l'espace tangent à un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ en un point m en posant

$$T_mU = \{m\} \times \mathbb{R}^n$$

De cette manière on distingue clairement les vecteurs des points, et en prime on sait toujours à quel point de l'espace s'applique tel ou tel vecteur vitesse.

Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ on définit la fonction x_k sur $\mathbb{R}^n$ par

$$x_k \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a_1, \ldots, a_n) & \longmapsto & a_k \end{array}$$

L'uplet de fonctions $(x_1, \ldots, x_n)$ est le système de coordonnées cartésiennes sur $\mathbb{R}^n$. Quand on écrit $x_k(m)$, on considère m comme un point.

Passons aux vecteurs. On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que e_k^* est la forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$e_k^* \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v_1, \ldots, v_n) & \longmapsto & v_k \end{array}$$

Mathématiquement, cette application est la même que x_k, mais nous les distinguerons car nous avons décidé de distinguer les points des vecteurs. Cette distinction faite, il existe néanmoins un lien entre x_k et e_k^*. En effet, la fonction x_k étant linéaire, elle est dérivable en tout point $m \in \mathbb{R}^n$ et on a

$$x_k'(m)(h) = h_k$$

Puisque dans cette égalité h est vu comme un vecteur, il est pertinent de reécrire cette égalité comme ceci :

$$x_k'(m) = e_k^*$$

ce qui montre que x_k' est une 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ (c'est une forme différentielle constante). Cette 1-forme, nous la noterons dx_k :

Notation 15. *On note dx_k la 1-forme différentielle constante sur $\mathbb{R}^n$ définie par*

$$dx_k(m) = e_k^*$$

pour tout $m \in \mathbb{R}^n$.

Plus tard nous dirons que dx_k est la dérivée extérieure de la fonction x_k. La proposition 5 se traduit ici par la

Proposition 16. *Soient U une partie de $\mathbb{R}^n$ et ω une p-forme différentielle sur U. Alors il existe une famille unique $(f_{i_1, \ldots, i_p}; 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n)$ de fonctions définies sur U telles que*

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} f_{i_1, \ldots, i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

Cette proposition nous permet de définir la classe d'une forme différentielle :

Définition 17. *Soient U une partie de $\mathbb{R}^n$ et $\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} f_{i_1, \ldots, i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ une p-forme différentielle sur U. On dit que ω est de classe $\mathcal{C}^k$ si les fonctions $f_{i_1, \ldots, i_p}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$.*

4 Formes différentielles sur $\mathbb{R}^3$

Si $k > n$, l'espace des k-formes sur $\mathbb{R}^n$ se réduit à $\{0\}$. Ainsi, sur $\mathbb{R}^3$ il n'y a que des 0-formes, des 1-formes, des 2-formes et des 3-formes. Notons (x, y, z) le système de coordonnées cartésiennes sur $\mathbb{R}^3$.

Toute 1-forme sur $\mathbb{R}^3$ s'écrit

$$f dx + g dy + h dz$$

Toute 2 forme s'écrit

$$f dy \wedge dz + g dx \wedge dz + h dx \wedge dy$$

Toute 3-forme s'écrit

$$f dx \wedge dy \wedge dz$$

Ainsi

- chaque 0-forme et chaque 3-forme s'identifie à une fonction de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$,
- chaque 1-forme et chaque 2-forme s'identifie à une fonction de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$.

Les fonctions de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$ sont appelées champs scalaires, et les fonctions de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$, champs de vecteurs. Dans tout ce qui précède on peut bien sûr remplacer $\mathbb{R}^3$ par une partie U de $\mathbb{R}^3$.

5 Produit extérieur sur $\Omega(U)$

Définition 18. *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et α, β des formes différentielles sur U de degrés p, q, respectivement. Le produit extérieur de α et β est la forme différentielle sur U de degré $p+q$ définie par*

$$(\alpha \wedge \beta)(m) = \alpha(m) \wedge \beta(m)$$

pour tout $m \in \mathbb{R}^n$.

On montre facilement que le produit extérieur confère à $\Omega(U)$ une structure d'algèbre graduée.

Définition 19. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$. On dit que $\Omega(U)$ est l'algèbre différentielle extérieure associée à U.*

6 Dérivée extérieure

La dérivation extérieure est une opération sur les formes différentielles permettant, entre autre, d'écrire le théorème de Stokes.

Définition 20. *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$ dérivable et ω une p-forme différentielle dérivable sur U ($p \geqslant 1$).*

1. *La dérivée extérieure de f est tout simplement la dérivée de f :*

$$df = f'$$

   c'est une forme de degré 1.

2. *Si ω s'écrit*

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} f_{i_1, \ldots, i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\mathrm{ip}}$$

   on pose

$$d\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} df_{i_1, \ldots, i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\mathrm{ip}}$$

   c'est une forme de degré $p+1$.

Cette définition dépend *a priori* de la base choisie (ici nous avons choisi la base canonique). On invite le lecteur à jeter un oeil sur la définition donnée dans [?]. Il s'agit d'une définition qui s'affranchit du choix d'une base, une définition intrinsèque.

Remarque 21. Dans tout ce qui précède, dx_j coïncide avec la dérivée extérieure de la fonction x_j.

Dans la proposition ci-dessous, $\Omega(1, U)$ désigne la sous-algèbre de $\Omega(U)$ des formes différentielles de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 22. *L'application*

$$\begin{array}{rcl} d \ : \ \Omega(1, U) & \longrightarrow & \Omega(U) \\ \omega & \longmapsto & d\omega \end{array}$$

est linéaire et possède les propriétés suivantes :

1. *Relation de Leibniz : pour tous $\alpha, \beta \in \Omega(1, U)$*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge d\beta$$

2. *Pour tout $\alpha \in \Omega(1, U)$,*

$$d(d\alpha) = 0$$

La preuve de cette proposition est une simple vérification.

7 Quelques calculs

7.1 Avec une courbe

Soit $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{R}^3$ une courbe dérivable. Pour tout $t\in[a,b]$, on note

$$\gamma(t)=(X(t),Y(t),Z(t))$$

Il est clair alors que $dX=X'\,dt$, $dY=Y'\,dt$ et $dZ=Z'\,dt$, par définition de d.

7.2 Avec une surface

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{array}{rccl} r\ : & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (X(u,v),Y(u,v),Z(u,v)) \end{array}$$

une application dérivable. On regardera r comme une surface de $\mathbb{R}^3$ (une surface singulière). Plus tard nous aurons besoin des 2-formes $dX\wedge dY$, $dY\wedge dZ$ et $dX\wedge dZ$. Ce sont des formes différentielles sur D. De

$$dX=\frac{\partial X}{\partial u}\,du+\frac{\partial X}{\partial v}\,dv$$

et

$$dY=\frac{\partial Y}{\partial u}\,du+\frac{\partial Y}{\partial v}\,dv$$

on déduit

$$dX\wedge dY=\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}-\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}\right)du\wedge dv$$

On notera que $\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}-\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}$ évalué en (u,v) est un mineur de la matrice de $r'(u,v)$ dans les bases canoniques, à savoir

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \\ \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Ce mineur est le jacobien de l'application

$$(u,v)\mapsto(X(u,v),Y(u,v))$$

et on le note

$$\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}-\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}$$

Un calcul analogue donne $dY\wedge dZ$ et $dX\wedge dZ$. On trouve

$$\begin{aligned} dX\wedge dY &= \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\,du\wedge dv \\ dY\wedge dZ &= \frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}\,du\wedge dv \\ dX\wedge dZ &= \frac{\partial(X,Z)}{\partial(u,v)}\,du\wedge dv \end{aligned}$$

8 Image réciproque d'une forme différentielle

Définition 23. *Soient $U\subset\mathbb{R}^n$, $f\colon U\to\mathbb{R}^m$ dérivable et ω une p-forme différentielle sur $f(U)$. L'image réciproque de ω par f est la p-forme sur U définie par*

$$(f^*\omega)(x)(X_1,\ldots,X_p)=\omega(f(x))(f'(x)(X_1),\ldots,f'(x)(X_p))$$

On notera que cela revient à utiliser l'application linéaire $f'(x)$ pour tirer en arrière la p-forme linéaire $\omega(x)$:

$$(f^*\omega)(x) = f'(x)^*(\omega(x))$$

Il est donc clair que $f^*\omega$ est une forme différentielle de degré p sur U.

On notera que si ω est une 1-forme, on a $(f^*\omega)(x)(h) = \omega(\varphi(x))(f'(x)(h))$, autrement dit :

$$f^*\omega = \omega(f(x)) \circ f'(x) \tag{1}$$

ce qui rappelle la formule de dérivation des applications composées.

Notation 24. *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $f: U \to \mathbb{R}^m$ une application dérivable. On note f^* l'application*

$$\begin{array}{rcl} f^* \ : \ \Omega(f(U)) & \longrightarrow & \Omega(U) \\ \omega & \longmapsto & f^*\omega \end{array}$$

Dans la proposition ci-dessous, $\mathcal{F}(V)$ désigne l'ensemble des fonctions définies sur V et $\mathcal{D}(V)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur V.

Proposition 25. *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $\varphi: U \to \mathbb{R}^m$ une application dérivable. Alors*

1. *L'application φ^* est linéaire.*
2. *Pour tous $\alpha, \beta \in \Omega(\varphi(U))$, on a $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta$.*
3. *Pour tous $\omega \in \Omega(\varphi(U))$ et $f \in \mathcal{F}(\varphi(U))$, $\varphi^*(f\omega) = (f \circ \varphi)\, \varphi^*\omega$.*
4. *Pour tous $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Omega(\varphi(U))$, on a $\varphi^*(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k) = \varphi^*\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \varphi^*\alpha_k$.*
5. *Pour tout $\omega \in \Omega(\varphi(U))$, on a $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)$.*

Démonstration.

a) L'item 1 ne pose aucune difficulté. L'item 2 découle directement de la proposition 11. L'item 3 est un cas particulier du 2. L'item 4 découle directement du 2.

b) Pour l'item 5, nous commençons par un cas particulier : $\varphi^*(df) = d(\varphi^*f)$ pour tout $f \in \mathcal{D}(\varphi(U))$. D'un côté nous avons $\varphi^*f = f \circ \varphi$ et donc $d(\varphi^*f)(x) = df(\varphi(x)) \circ d\varphi(x)$. D'un autre côté, d'après (1) nous avons $\varphi^*(df) = df(\varphi(x)) \circ d\varphi(x)$, d'où l'égalité.

c) Passons au cas général. Soit

$$\omega = \sum_{j_1 < \ldots < j_p} f_{j_1, \ldots, j_p}\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p}$$

une p-forme différentielle sur $\varphi(U)$. On a

$$d\omega = \sum_{j_1 < \ldots < j_p} df_{j_1, \ldots, j_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p}$$

Notons $(X_1, \ldots, X_m)$ les applications composantes de φ. D'après les items 1, 2 et la partie b) qui précède, on a

$$\begin{array}{rcl} \varphi^*(d\omega) & = & \displaystyle\sum_{j_1 < \ldots < j_p} \varphi^*(df_{j_1, \ldots, j_p}) \wedge dX_{j_1} \wedge \ldots \wedge dX_{j_p} \\ & = & \displaystyle\sum_{j_1 < \ldots < j_p} d\,(f_{j_1, \ldots, j_p} \circ \varphi) \wedge dX_{j_1} \wedge \ldots \wedge dX_{j_p} \\ & = & d\left(\displaystyle\sum_{j_1 < \ldots < j_p} (f_{j_1, \ldots, j_p} \circ \varphi) \wedge dX_{j_1} \wedge \ldots \wedge dX_{j_p} \right) \\ & = & d(\varphi^*\omega) \end{array}$$

Le passage de la deuxième à la troisième ligne est justifié comme ceci : φ est de classe $\mathcal{C}^2$, ainsi ses composantes X_j sont aussi de classe $\mathcal{C}^2$ et $d(dX_j) = 0$. La formule de Leibniz permet alors de conclure.

□

Proposition 26. *Soient* $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *et* $\psi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *des applications dérivables. Alors*

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$$

La preuve de cette proposition est une simple vérification. On peut grâce aux deux propositions précédentes calculer explicitement l'image réciproque d'une forme différentielle

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} f_{i_1, \ldots, i_p} \, dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_p}$$

En effet, nous avons

$$\varphi^* \omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} (f_{i_1, \ldots, i_p} \circ \varphi) \, dY_{i_1} \wedge \ldots \wedge dY_{i_p}$$

où $Y_1, \ldots, Y_m$ désignent les fonctions composantes de φ. On rappelle que chaque dX_k est égal à

$$dY_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Y_k}{\partial x_j} dx_j$$

On laisse au lecteur le plaisir de poursuivre ce calcul. On pourra consulter [?]. Nous constatons au passage que la classe de $\varphi^* \omega$ dépendra des classes de ω et de φ. Il est clair que si φ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ et ω de classe $\mathcal{C}^k$, alors $\varphi^* \omega$ est aussi de classe $\mathcal{C}^k$.

9 Exemples

Les cas qui nous interessent sont ceux où φ est soit une courbe, soit une surface de $\mathbb{R}^3$.

9.1 Cas d'une courbe

Soit $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^3$ une courbe dérivable de $\mathbb{R}^3$, pour laquelle on note

$$\gamma(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$$

On a $\gamma^*(dx) = d(\gamma^* x) = d(\gamma \circ x) = dX$. De même $\gamma^*(dy) = dY$ et $\gamma^*(dz) = dZ$. Soit ω une 1-forme différentielle définie sur l'image de γ. Cette forme s'écrit alors

$$\omega = p dx + q dy + r dz$$

où p, q et r sont des fonctions sur $\gamma([a, b])$. Par linéarité, nous avons

$$\gamma^* \omega = (p \circ \gamma) \, dX + (q \circ \gamma) \, dY + (r \circ \gamma) \, dZ$$

Or d'après la section 7.1, $dX = X' \, dt$, $dY = Y' \, dt$ et $dZ = Z' \, dt$. Nous en déduisons que

$$\gamma^* \omega = ((p \circ \gamma) \, X' + (q \circ \gamma) \, Y' + (r \circ \gamma) \, Z') \, dt$$

9.2 Cas d'une surface

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{array}{rrcl} r \ : & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \end{array}$$

une application dérivable. Soit ω une 2-forme différentielle définie sur $r(D)$. Cette forme s'écrit

$$\omega = p dy \wedge dz + q dx \wedge dz + r dx \wedge dy$$

On a $\gamma^*(dx \wedge dy) = d(\gamma^* x) \wedge d(\gamma^* y) = d(\gamma \circ x) \wedge d(\gamma \circ y) = dX \wedge dY$. Or, d'après la section 7.2, $dX \wedge dY = \frac{\partial (X,Y)}{\partial (u,v)} du \wedge dv$, ainsi

$$\gamma^*(dx \wedge dy) = \frac{\partial (X,Y)}{\partial (u,v)} du \wedge dv$$

On trouve des formules analogues pour $\gamma^*(dy \wedge dz)$ et $\gamma^*(dx \wedge dz)$. Finalement, nous avons

$$\gamma^* \omega = \left((p \circ \gamma) \frac{\partial (Y,Z)}{\partial (u,v)} + (q \circ \gamma) \frac{\partial (X,Z)}{\partial (u,v)} + (r \circ \gamma) \frac{\partial (X,Y)}{\partial (u,v)} \right) du \wedge dv$$

10 Intégrale d'une forme différentielle

L'algèbre extérieure sert essentiellement à « intégrer » les k-formes sur des k-surfaces. Nous commencerons par l'intégration d'une n-forme de $\mathbb{R}^n$ sur une partie quarrable :

Définition 27. *Soient D une partie quarrable de $\mathbb{R}^n$ et ω une n-forme différentielle continue sur D. Cette forme s'écrit alors*

$$\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

et on définit l'intégrale de ω sur D par

$$\int_D \omega = \int_D f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

Cette définition mérite quelques explications. Prenons $n = 3$ pour simplifier, et notons (x, y, z) le système de coordonnées cartésiennes. Soit D une partie quarrable de $\mathbb{R}^3$ et

$$\omega = f dx \wedge dy \wedge dz$$

une 3-forme continue sur D. Nous savons que pour définir l'intégrale

$$\int_D f(x, y, z)\, dx dy dz$$

on décompose D en pavés élémentaires $P_1, \ldots, P_N$, on choisit un point m_k dans chaque P_k et on somme les $f(m_k) V(P_k)$, où $V(P_k)$ désigne le volume de P_k. Le résultat obtenu est la somme associée à la « décomposition ponctuée » choisie. Si on note Δ cette décomposition, on note u_Δ la somme associée. L'intégrale de f sur D et la borne supérieure de l'ensemble de tous les u_Δ. On voit donc que l'intégration se fait grâce à la définition du volume des pavés élémentaires. Nous savons que le volume d'un pavé élémentaire de dimensions dx, dy, dz est le produit $dx dy dz$, c'est pour cela que nous écrivons le symbole $dx dy dz$ dans l'intégrale de f. Il indique que le calcul de l'intégrale est effectué en calculant le volume des pavés élémentaires de la manière que nous venons d'évoquer. En physique, le symbole $dx dy dz$ est appelé élément de volume. En mathématiques, on considère que l'élément de volume est la forme $dx \wedge dy \wedge dz$. Il est intéressant de comparer le point de vue des mathématiciens et celui des physiciens sur ces deux objets :

- Pour le physicien, $dx dy dz$ est le volume d'un pavé dont l'origine est le point (x, y, z) et dont les côtés s'obtiennent en opérant une variation infinitésimale sur x, y et z : une variation de dx unités pour x, dy unités pour y et dz unités pour z.

  FIGURE

– Le point de vue mathématique consiste à décrire ce pavé avec des vecteurs : on dit que c'est le pavé d'origine (x, y, z) défini par les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ dont les coordonnées sont

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \delta x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta z \end{pmatrix}$$

Pour le mathématicien, dx, dy et dz sont des formes linéaires et on sait par exemple que

$$dx(\vec{a}) = \delta x$$

On sait aussi que $dx \wedge dy \wedge dz$ est le déterminant calculé dans la base canonique, c'est à dire le produit mixte et ici nous avons

$$(dx \wedge dy \wedge dz)(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \delta x \delta y \delta z$$

On rappelle que d'une manière générale $(dx \wedge dy \wedge dz)(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est le volume du pavé $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Finalement, la notation $dxdydz$ correspond à un langage métrique (on y voit des petites variations de longueurs) tandis que la notation $dx \wedge dy \wedge dz$ correspond à un langage vectoriel (il s'agit de calculer le volume d'un pavé élémentaire, et il n'y a rien de mieux pour cela que les formes alternées).

L'intégrale de f sur D est la somme des éléments infinitésimaux $f(m)\, V(P_m)$ où P_m est le pavé infinitésimal d'origine m, et nous avons vu que $f(m)\, V(P_m)$ est égal à $\omega(m)(\overrightarrow{a_m}, \overrightarrow{b_m}, \overrightarrow{c_m})$ où $\overrightarrow{a_m}$, $\overrightarrow{b_m}$ et $\overrightarrow{c_m}$ sont les vecteurs infinitésimaux parallèles à x, y et z, respectivement. Voilà pourquoi nous disons que $\int_D f(x, y, z)\, dxdydz$ est l'intégrale de ω sur D. Nous allons maintenant généraliser cette définition.

Définition 28. *Soient D une partie quarrable de $\mathbb{R}^p$, $r\colon D \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et ω une p-forme différentielle continue sur $r(D)$. On définit l'intégrale de ω sur r par*

$$\int_r \omega = \int_D r^* \omega$$

On laisse au lecteur le soin de montrer que si

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} f_{i_1, \ldots, i_p}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

et

$$r = (X_1, \ldots, X_n)$$

alors

$$\int_r \omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \int_D f_{i_1, \ldots, i_p}(r(u)) \frac{\partial (X_{i_1}, \ldots, X_{i_p})}{\partial (u_1, \ldots, u_p)}\, du_1 \ldots du_p$$

où $\frac{\partial (X_{i_1}, \ldots, X_{i_p})}{\partial (u_1, \ldots, u_p)}$ désigne le jacobien de $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_p})$ évalué en $u = (u_1, \ldots, u_p)$.

Exemple 29. Dans $\mathbb{R}^3$. Intégrons $P dx \wedge dy$ le long d'une surface

$$r\colon (u, v) \in D \mapsto (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$$

On a

$$\int_r P dx \wedge dy = \int_D P(r(u, v)) \frac{\partial (X, Y)}{\partial (u, v)}\, dudv$$

On a clairement la

Proposition 30. *Soient D une partie quarrable de $\mathbb{R}^p$, $r\colon D\to\mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Alors l'application*

$$\begin{array}{rcl}\Omega(0,r(D)) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ \omega & \longmapsto & \int_r \omega\end{array}$$

est linéaire.

11 Intégrales particulières (circulation et flux)

11.1 Intégrale d'une 3-forme dans $\mathbb{R}^3$

Soient D une sous-variété quarrable de $\mathbb{R}^3$ et $r\colon D\to\mathbb{R}^3$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme (cela signifie que r est bijective et que r et r^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$). L'image de r est aussi une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3. On suppose que le jacobien de r est positif, autrement dit que pour tout $m\in D$, $Jr(m)>0$. Cela revient à supposer que les orientations sur $r(D)$ induites par r et $\mathbb{R}^3$ coïncident. Soit $\omega=f dx\wedge dy\wedge dz$ une 3-forme différentielle continue sur $r(D)$. On a

$$\begin{array}{rcl}\int_r \omega & = & \int_D r^*\omega\\ & = & \int_D f(r(u,v,w))\,Jr(u,v,w)\,du dv dw\end{array}$$

et puisque $Jr(u,v,w)=|Jr(u,v,w)|$, le théorème de changement de variable nous dit que

$$\int_r \omega=\int_{r(D)} f(x,y,z)\,dx dy dz$$

De la même manière on trouve

$$\int_{-r}\omega=-\int_{r(D)} f(x,y,z)\,dx dy dz=-\int_r \omega$$

où $-r$ désigne une paramétrisation donnant la même sous-variété $r(D)$ orientée de manière opposée. On mesure ici à quel point l'intégrale de ω sur une sous-variété est sensible à l'orientation.

11.2 Elément de volume, élément de surface

Le calcul précédent justifie la

Définition 31. *La forme $dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$ sur $\mathbb{R}^n$ est appelée élément de volume de $\mathbb{R}^n$. On la note abusivement dV. Si $n=2$, on la note dS (élément de surface ou d'aire).*

Exemple 32. La forme $dx\wedge dy\wedge dz$ est l'élément volume de $\mathbb{R}^3$. La forme $dx\wedge dy$ est l'élement d'aire de $\mathbb{R}^2$.

11.3 Intégrale d'une 1-forme dans $\mathbb{R}^3$

Une intégrale curviligne est l'intégrale d'une 1-forme le long d'un chemin. Soit

$$\begin{array}{rcccl}\gamma & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ & & t & \longmapsto & (x(t),y(t),z(t))\end{array}$$

une courbe de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\omega=p dx+q dy+r dz$ une 1-forme sur $\gamma([0,1])$. On peut identifier ω à un champ de vecteurs $F=pi+qj+rk$. On a

$$\begin{array}{rcl}\int_\gamma \omega & = & \int_0^1 (p(\gamma(t))\,\dot{x}(t)+q(\gamma(t))\,\dot{y}(t)+r(\gamma(t))\,\dot{z}(t))\,dt\\ & = & \int_0^1 F(\gamma(t)).\dot{\gamma}(t)\,dt\end{array}$$

Ainsi, l'intégrale de ω sur γ est l'intégrale du produit scalaire de F par la vitesse $\dot{\gamma}$ du point mobile $\gamma(t)$. On l'appelle circulation de F le long de γ.

Définition 33. *Soient γ: $[0,1] \to \mathbb{R}^3$ une courbe de classe $\mathcal{C}^1$ et $F = pi + qj + rk$ un champ de vecteurs continu sur $\gamma([0,1])$. La circulation de F le long de γ est l'intégrale*

$$c(F,\gamma) = \int_0^1 F(\gamma(t)).\dot{\gamma}(t)\, dt$$

On peut voir $c(F,\gamma)$ comme l'intégrale du produit scalaire de F par le vecteur tangent unitaire $\vec{\tau}$ de γ effectuée avec l'élément $\|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$:

$$c(F,\gamma) = \int_0^1 F(\gamma(t)).\vec{\tau}(t)\, \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

où

$$\vec{\tau}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$$

On rappelle que l'élément $\|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$ permet de calculer la longueur de γ :

Proposition 34. *Soit γ: $[0,1] \to \mathbb{R}^3$ une courbe de classe $\mathcal{C}^1$. Alors la longueur de γ est égale à*

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

On adopte alors la

Définition 35.

1. *L'élément de longueur le long de γ est la 1-forme sur $[0,1]$ définie par*

$$d\ell = \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

2. *L'élément vectoriel de longueur le long de γ est*

$$\vec{d\ell} = \dot{\gamma}\, dt = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}\|\dot{\gamma}(t)\|\, dt = \vec{\tau}\, \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt = \vec{\tau}\, d\ell$$

Ces définitions justifient la

Notation 36. *La circulation de F le long de γ est notée*

$$\int_\gamma \vec{F}.\vec{d\ell}$$

Nous donnons toutes ces notations pour donner aux étudiants les moyens de décrypter les formules d'analyse vectorielle exposées dans les manuels de mathématiques ou de physique (ces notations peuvent différer d'un livre à un autre.)

11.4 Intégrale d'une 2-forme dans $\mathbb{R}^3$

Soit

$$\begin{array}{rcccl} r & : & D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (u,v) & \longmapsto & (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{array}$$

une application de classe $\mathcal{C}^1$. Soit ω une 2-forme différentielle continue sur $r(D)$. On écrira ω comme ceci :

$$\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

On notera la présence de $dz \wedge dx$ au lieu de $dx \wedge dz$, nous comprendrons ce choix plus tard. On peut identifier ω au champ de vecteurs

$$F = Pi + Qj + Rk$$

On a

$$\int_\gamma \omega = \int_D \left(P(r(u,v)) \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q(r(u,v)) \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R(r(u,v)) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) du dv$$

Nous reconnaissons là le produit scalaire de F par le vecteur

$$\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)$$

c'est à dire

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \right)$$

Le lecteur aura reconnu les composantes du produit vectoriel

$$N(u,v) = \frac{\partial r}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial r}{\partial v}(u,v)$$

On rappelle que le plan vectoriel tangent à r en (u,v) est engendré par les vecteurs $\frac{\partial r}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\partial r}{\partial v}(u,v)$. Ainsi, $N(u,v)$ est un vecteur normal à r en (u,v). C'est même un vecteur normal positif. Finalement

$$\int_\gamma \omega = \int_D F(r(u,v)).N(u,v)\, du dv$$

L'intégrale de ω est l'intégrale du produit scalaire du champ F par le vecteur normal positif à r. C'est ce qu'on appelle le flux de F à travers r.

Définition 37. *Soient $r: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $F = Pi + Qj + Rk$ un champ de vecteurs continu sur $r(D)$. Le flux de F à travers r est*

$$\Phi(F,r) = \int_D F(r(u,v)).\left(\frac{\partial r}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial r}{\partial v}(u,v) \right) du dv$$

Il existe d'autres manières de présenter cette formule :

$$\begin{aligned} \Phi(F,r) &= \int_D F(r(u,v)).N(u,v)\, du dv \\ &= \int_D F(r(u,v)).\frac{N(u,v)}{\|N(u,v)\|}\, \|N(u,v)\| du dv \end{aligned}$$

ce qui fait apparaître l'élément $\|N(u,v)\| du dv$, appelé élément d'aire le long de r.

11.5 Elément d'aire dans l'espace et intégrale surfacique

Le flux motive la définition suivante :

Définition 38. *Soit $r: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. L'élément d'aire le long de r est*

$$dS = \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du dv$$

Nous expliquerons ce terme plus tard. On peut utiliser dS pour définir une nouvelle intégrale :

Définition 39. *Soient $r: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $r(D)$. On définit l'intégrale surfacique de f sur r par*

$$\int_r f dS = \int_D f(r(u,v)) \left\| \frac{\partial r}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial r}{\partial v}(u,v) \right\| du dv$$

On a vu par exemple que le flux de F à travers r est l'intégrale surfacique de $F.n$ (produit scalaire du champ par le vecteur normal positif unitaire) sur r :

$$\Phi(F,r) = \int_r \vec{F}.\vec{n}\, dS$$

(on a mis les flèches pour plus de clarté.) Signalons que les physiciens utilisent une autre présentation :

$$\Phi(F,r) = \int_r \vec{F}.\overrightarrow{dS}$$

où $\overrightarrow{dS} = \vec{n}\, dS$ est un élément vectoriel.

La dérivée de r en (u,v) transforme le rectangle (e_1, e_2) d'aire 1 en le parallélogramme $\left(\frac{\partial r}{\partial u}(u,v), \frac{\partial r}{\partial v}(u,v)\right)$ d'aire $\|N(u,v)\|$. Il n'est pas difficile de prouver la

Proposition 40. *Soit $r: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$. Alors l'aire de $r(D)$ est égale à*

$$\mathcal{A}(r) = \int_r dS = \int_D \left\| \frac{\partial r}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial r}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv$$

Cette proposition justifie le terme « élément d'aire ».

12 Interprétations physique du flux et de la circulation

On commence par des exemples illustrant le flux.

Exemple 41. Fluides. Considérons un fluide en mouvement, comme l'eau d'une rivière qui coule. Soit m un point. On note $V(m)$ la vitesse du fluide en m. On définit ainsi le champ V des vitesses du fluide. Soit Σ une surface. On peut imaginer que Σ est un filet tendu en travers de la rivière, d'une rive à l'autre. On co-oriente Σ avec un vecteur normal $\vec{n}$ unitaire. Nous dirons que $\vec{n}$ pointe vers l'extérieur. Nous définissons ainsi dans un voisinage de Σ une partie dite « intérieure » et une partie « extérieure ».

Figure 1.

Essayons d'évaluer le volume d'eau qui « sort », c'est à dire qui traverse Σ positivement. Pour cela nous considérons un morceau élémentaire de Σ en m d'aire dS. On regarde dans quelle direction pointe $V(m)$: vers l'extérieur ou l'intérieur ? Pour mesurer cela on fait tout simplement le produit scalaire de $V(m)$ par $\vec{n}(m)$. Le volume d'eau qui traverse l'élément de surface est approximativement

$$V(m).\vec{n}\, dS$$

et donc le volume d'eau qui traverse Σ positivement est

$$\int_\Sigma V.\vec{n}\, dS$$

c'est à dire le flux de V à travers Σ. Cet exemple illustre de manière concrète le flux d'un champ à travers une surface orientée.

Exemple 42. Intensité du courant électrique. Considérons un fil conducteur parcouru par un courant électrique. Soit Σ une section de ce fil. On note j la densité de courant. En chaque point m, le vecteur $j(m,t)$ montre dans quelle direction se déplacent les charges électriques, à l'instant t. La norme de $j(m,t)$ est exprimée en coulombs par mètres carrés par seconde, $\mathrm{C\,m^{-2}s^{-1}}$. L'intensité est le flux de j à travers Σ :

$$I = \int_\Sigma j.\overrightarrow{dS}$$

L'unité de I est le coulomb par seconde, C/s, c'est à dire l'ampère.

Exemple 43. Diffusion de matière. On considère une matière qui se diffuse dans un fluide. On note j la densité de diffusion. La norme de j est exprimée en $\mathrm{N\,m^{-2}\,s^{-1}}$, c'est à dire en nombre de moles par mètres carrés par secondes. Le flux de j à travers une surface Σ est la quantité de matière traversant cette surface, en une seconde.

Exemple 44. Propagation de la chaleur. De la chaleur se propage dans un milieu. On note j la densité de flux thermique. La norme de j est exprimée en $\mathrm{J\,m^{-2}s^{-1}}$, c'est à dire en joules par mètres carrés par secondes. Le flux de j à travers Σ est la quantité de chaleur traversant Σ, en une seconde.

On termine cette section par un exemple illustrant la circulation.

Exemple 45. Travail d'une force. On considère un point mobile $\gamma(t)$ auquel s'applique une force $F(\gamma(t))$. On note $\tau(t)$ le vecteur tangent positif unitaire de γ en t. Le travail de F sur un morceau élémentaire de γ de longueur $d\ell$ est le produit scalaire $F.\tau d\ell$. Par conséquent le travail de F le long de γ est

$$W(F,\gamma) = \int_\gamma F.\tau d\ell = \int_\gamma F.\vec{d\ell} = c(F,\gamma)$$

c'est à dire la circulation de F le long de γ.

13 Opérateur *d*, champs de scalaires et champs de vecteurs

Les physiciens travaillent avec des champs scalaires et des champs vectoriels plutôt qu'avec des formes différentielles. Nous commencerons donc donner une correspondance entre ces différents objets :

Définition 46.

1. *Le champ vectoriel correspondant à* $Pdx + Qdy + Rdz$ *est* $Pi + Qj + Rk$.
2. *Le champ vectoriel correspondant à* $Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$ *est* $Pi + Qj + Rk$.
3. *Le champ de scalaires correspondant à* $f dx\wedge dy\wedge dz$ *est la fonction* f.

On peut utiliser l'opérateur d de dérivée extérieure pour dériver les champs de scalaires et de vecteurs. Le diagramme ci-dessous représente l'opérateur d :

$$\begin{array}{ccccccc} \Lambda^0(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Lambda^1(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Lambda^2(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Lambda^3(\mathbb{R}^3) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathcal{F}(\mathbb{R}^3) & & \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) & & \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) & & \mathcal{F}(\mathbb{R}^3) \end{array}$$

On voit que via les identifications faites juste au dessus, nous disposons de trois opérateurs : un premier qui transforme les champs de scalaires en champs de vecteurs, un deuxième qui transforme un champ de vecteurs en un champs de vecteurs, et un troisième qui transforme un champs de vecteurs en un champ de scalaires. On les appelle respectivement : gradient, rotationnel et divergence.

Remarque 47. Dans ce diagramme on peut remplacer $\mathbb{R}^3$ par une partie U de $\mathbb{R}^3$.

14 Gradient d'un champ de scalaires

La dérivée extérieure d'une 0-forme f est la 1-forme $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$, cela nous inspire la définition du gradient :

Définition 48. *Soit* $f\colon U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ *un champ de scalaires dérivable. Alors le gradient de* f *est le champ vectoriel sur* U *défini par*

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$$

On notera cette caractérisation :

Proposition 49. *Soit* $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *un champ de scalaires dérivable. Alors le gradient de* f *est le seul champ* G *sur* U *vérifiant*

$$Df(x, y, z)(H) = \langle G(x, y, z), H \rangle$$

pour tout $H \in \mathbb{R}^3$.

15 Rotationnel d'un champ de vecteurs

La dérivée extérieure d'une 1-forme

$$\omega = P dx + Q dy + R dz$$

est

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz$$

On rappelle que

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

On a l'analogue pour dQ et dR. On en déduit que

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial R}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Ceci nous inspire la

Définition 50. *Soit* $E = Pi + Qj + Rk$ *un champ de vecteurs dérivable sur une partie* U *de* $\mathbb{R}^3$*. Le rotationnel de* E *est le champ vectoriel sur* U *défini par*

$$\operatorname{rot} E = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k$$

Une manière simple de retenir cette formule est d'introduire l'opérateur ∇ (nabla)

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

On définit l'opérateur $\nabla \wedge \bullet$ en disant que $\nabla \wedge E$ se calcule en faisant un produit vectoriel formel avec ∇ et E : les coefficients de ∇ n'étant pas des nombres, ils sont appliqués comme des opérateurs. On remarque alors ceci :

$$\operatorname{rot} E = \nabla \wedge E$$

Remarque 51. Si on se souvient de la première composante $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}$, on retrouve les autres par permutations circulaires : $P \to Q \to R \to P \to$ etc., $x \to y \to z \to x \to$ etc. On retiendra que dans $\operatorname{rot} E$, P est dérivée par rapport à y et z, mais pas par rapport à x, même chose avec Q : par x et z, et avec R : par x et y. Cela évitera des erreurs.

16 Divergence d'un champ vectoriel

La dérivée extérieure de la 2-forme

$$\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

est

$$\begin{aligned} d\omega &= dP\wedge dy\wedge dz + dQ\wedge dz\wedge dx + dR\wedge dx\wedge dy \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dx + \frac{\partial R}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz \end{aligned}$$

Définition 52. *Soit $E = Pi + Qj + Rk$ un champ de vecteurs dérivable sur une partie U de $\mathbb{R}^3$. La divergence de E est le champ de scalaires sur U défini par*

$$\operatorname{div} E = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

On peut retenir cette formule en écrivant ceci :

$$\operatorname{div} E = \langle \nabla, E\rangle$$

Il faut comprendre ce produit scalaire purement formel avec la même logique que le produit vectoriel de nabla par E. On a la caractérisation suivante :

Proposition 53. *Soit $E: U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs dérivable. Alors le divergent de E en (x,y,z) est la trace de l'endomorphisme $E'(x,y,z)$.*

On rappelle que la dérivée $E'(x,y,z)$ de E en (x,y,z) est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$.

17 Laplacien

Nous disposons pour l'instant de trois opérateurs différentiels intéressants :

$$\begin{array}{ccccccc} \Lambda^0(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Lambda^1(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Lambda^2(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & \Lambda^3(\mathbb{R}^3) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathcal{F}(\mathbb{R}^3) & \underset{\mathrm{grad}}{\longrightarrow} & \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) & \underset{\mathrm{rot}}{\longrightarrow} & \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) & \underset{\mathrm{div}}{\longrightarrow} & \mathcal{F}(\mathbb{R}^3) \end{array}$$

On sait que $d\circ d = 0$, donc rien ne sert de composer grad et rot, ou rot et div (cela donnerait l'opérateur nul). En revanche, il serait intéressant de voir ce que donne $\operatorname{div}\circ\operatorname{grad}$. Soit $f: U\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur une partie U de $\mathbb{R}^3$. On a

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$$

et donc

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

On obtient un nouvel opérateur que ceux qui étudient les fonctions holomorphes connaissent bien.

Définition 54. *Soient U une partie de $\mathbb{R}^3$ et $f: U\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Le laplacien de f est la fonction*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

On note aussi

$$\Delta = \operatorname{div}\circ\operatorname{grad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Il existe une version vectorielle :

Définition 55. *Soient U une partie de $\mathbb{R}^3$ et $E: U\to\mathbb{R}$ un champ de vecteurs deux fois dérivable. On note $E = pi + qj + rk$. Le laplacien (vectoriel) de E est le champ*

$$\vec{\Delta} E = (\Delta p)\, i + (\Delta q)\, j + (\Delta r)\, k$$

Exercice 2. Examiner ce que donne $\mathrm{grad} \circ \mathrm{div}$.

18 Propriétés

Les premières formules remarquables sont celles qui traduisent $d \circ d = 0$:

Proposition 56. *Soient $U \subset \mathbb{R}^3$, $f: U \to \mathbb{R}$ un champ de scalaires dérivable et $E: U \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs dérivable. Alors*

1. $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f) = 0$.
2. $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}(E)) = 0$.

On invite le lecteur à démontrer ces formules en partant des définitions des opérateurs concernées (c'est à dire sans utiliser $d \circ d = 0$).

Les opérateurs grad, rot et div sont des dérivations dans le sens où elles satisfont des relations de Leibniz :

Proposition 57. *Soient $U \subset \mathbb{R}^3$, $f: U \to \mathbb{R}^3$ un champ de scalaires dérivable et $E, F: U \to \mathbb{R}^3$ des champs de vecteurs dérivable. Alors*

1. $\mathrm{div}\,(fE) = (\mathrm{grad}\, f).E + f\,\mathrm{div}\, E$
2. $\mathrm{div}\,(E \wedge F) = F.\mathrm{rot}\, E - E.\mathrm{rot}\, F$
3. $\mathrm{rot}\,(fE) = \mathrm{grad}\, f \wedge E + f\,\mathrm{rot}\, E$
4. $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, E) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,(E)) - \vec{\Delta}\, E$

La démonstration de ces formules est un bon exercice. Signalons qu'il existe d'autres formules de Leibniz (le lecteur étudiera par exemple le rotationnel de $E \wedge F$, par exemple).

19 Théorème de Stokes

On admettra le résultat suivant :

Théorème 58. *(Théorème de Stokes) Soient M une sous-variété différentielle orientée de $\mathbb{R}^n$ de dimension $p+1$ et ω une p-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur M. On munit ∂M, le bord de M, de l'orientation induite par celle de M. Alors*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

20 Applications du théorème de Stokes

Le théorème de Stokes donne des formules utiles en physique pour calculer les flux et les circulations.

20.1 Formule d'Ostrogradski

Soient V une sous-variété de dimension 3 de $\mathbb{R}^3$, ∂V le bord de V (c'est une surface fermée) et ω une 2-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur V. On munie V de l'orientation de $\mathbb{R}^3$. Ceci induit une orientation sur ∂V. On notera que le vecteur normal positif à ∂V est sortant, autrement dit, il indique l'extérieur de V. D'après le théorème de Stokes,

$$\int_{\partial V} \omega = \int_V d\omega$$

Si nous identifions ω à une champ $E = Pi + Qj + Rk$, alors

- l'intégrale de ω sur r est le flux de E à travers ∂V, on l'appelle « flux sortant », à cause de l'orientation de la surface,
- $d\omega$ s'identifie au divergent de E,
- l'intégrale de $d\omega$ est l'intégrale de la fonction $\operatorname{div} E$ sur $v(D_1)$.

On peut donc reformuler le théorème de Stokes en termes de flux et de la divergence :

Théorème 59. *Formule d'Ostrogradski. Soient V une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, ∂V le bord de V et E un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur V. Alors le flux sortant de E à travers ∂V est égal à l'intégrale de E sur V :*

$$\int_{\partial V} \vec{E}.\,\vec{dS} = \int_V \operatorname{div} E dx dy dz$$

Remarque 60. La notation avec les flèches permet de retenir cette formule plus facilement.

Exemple 61. Calculons le flux de

$$E(x, y, z) = xi + yj + zk$$

à travers la sphère S de centre O et de rayon R. Notons $\vec{n}$ le vecteur normal unitaire sortant. On notera que

$$E(m) = \overrightarrow{Om}$$

ainsi, en $m = r(\theta, \varphi)$, on a

$$E = R\vec{n}$$

et donc

$$\int_S E.\vec{dS} = \int_S (R\vec{n}).(\vec{n}\, dS) = R\int_S dS = R\mathcal{A}$$

où $\mathcal{A}$ désigne l'aire de S. Par ailleurs, la formule d'Ostrogradski donne

$$\int_S E.\vec{dS} = \int_B \operatorname{div}(E)\, dV = \int_B 3dV = 3\mathcal{V}$$

où B désigne la boule bordée par S et $\mathcal{V}$ sont volume. On en déduit l'égalité

$$R\mathcal{A} = 3\mathcal{V}$$

que nous connaissions déjà puisque $\mathcal{A} = 4\pi R^2$ et $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

20.2 Formule de Stokes

Prenons maintenant une surface Σ de $\mathbb{R}^3$ et une 1-forme ω de classe $\mathcal{C}^1$ sur Σ. Le théorème de Stokes s'écrit

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_\Sigma d\omega$$

où $\partial\Sigma$ est le bord orienté de Σ. Si nous identifions ω à un champ $E = Pi + Qj + Rk$ alors

- l'intégrale de ω sur $\partial\Sigma$ est la circulation de E le long de $\partial\Sigma$,
- $d\omega$ s'identifie au rotationnel de E,
- l'intégrale de $d\omega$ est le flux de $\operatorname{rot} E$ à travers Σ.

On peut donc reformuler le théorème de Stokes en termes de circulation et de rotationnel :

Théorème 62. *Formule de Stokes. Soient Σ une surface orientée de $\mathbb{R}^3$, $\partial\Sigma$ le bord orienté de Σ et E un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur Σ . Alors la circulation de E le long de $\partial\Sigma$ est égale au flux du rotationnel de E à travers Σ :*

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{E}.\vec{d\ell} = \int_\Sigma \operatorname{rot}\vec{E}.\,\vec{dS}$$

20.3 Formule de Green-Riemann

On se place dans $\mathbb{R}^2$. Soient Σ une surface de $\mathbb{R}^2$ et $\omega = Pdx + Qdy$ une 1-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur Σ. On munit Σ de l'orientation héritée de $\mathbb{R}^2$. On note $\partial\Sigma$ le bord orienté de Σ. D'après le théorème de Stokes, l'intégrale de ω sur $\partial\Sigma$ est égale à celle de $d\omega$ sur Σ. Un petit calcul donne

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

et l'égalité des intégrales s'écrit

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

c'est à dire

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

Théorème 63. *Formule de Green-Riemann. Soient Σ une surface de $\mathbb{R}^2$ de bord $\partial\Sigma$ et $Pdx + Qdy$ une 1-forme de classe $\mathcal{C}^1$ sur Σ. On oriente $\partial\Sigma$ en disant que le sens positif est celui qui nous fait tourner dans le sens trigonimétrique. Alors*

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

On aurait pu trouver cette formule en travaillant dans $\mathbb{R}^3$. Il suffit de supposer que le champ E est horizontal : $E = Pi + Qj$, et que Σ est une surface contenue dans le plan (O, x, y). On note

$$\begin{array}{rccl} r : & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{array}$$

la paramétrisation de Σ dont le vecteur normal positif pointe vers le « haut ». On a alors :

- $\int_{\partial\Sigma} \vec{E}.\vec{d\ell} = \int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy$
- $\mathrm{rot}\, E = \begin{pmatrix} -\frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$
- $\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix}$
- $\left\langle \mathrm{rot}\, E, \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right\rangle = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$
- $\int_{\Sigma} \mathrm{rot}\, \vec{E}.\, \vec{dS} = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du dv = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy$

Exemple 64. Soit Σ une surface compacte de $\mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{A}(\Sigma)$ son aire. On montre grâce à la formule de Green-Riemann que

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_{\partial\Sigma} x dy = -\int_{\partial\Sigma} y dx = \frac{1}{2}\int_{\partial\Sigma} (x dy - y dx)$$

Exemple 65. Un exemple classique. Intégrons la forme

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

sur le cercle

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_0^{2\pi} \gamma^*\omega \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} d\omega &= d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\wedge dy - d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\wedge dx \\ &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\wedge dy - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\wedge dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, si on pouvait étendre ω en une forme $\tilde{\omega}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $\mathbb{R}^2$, on aurait, d'après la formule de Green-Riemann, $\int_{\partial D}\tilde{\omega} = \int_D d\tilde{\omega}$, c'est à dire $2\pi = 0$.

20.4 Formule du gradient

On rappelle que l'élément d'aire le long de la surface $r: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ est

$$dS = \left\|\frac{\partial r}{\partial u}\wedge\frac{\partial r}{\partial v}\right\| du\,dv$$

où les (u,v) sont les éléments de D, c'est à dire les paramètres de la surface. On rappelle aussi que l'élément vectoriel de surface est

$$d\vec{S} = \left(\frac{\partial r}{\partial u}\wedge\frac{\partial r}{\partial v}\right) du\,dv$$

Cet élément permet aux physiciens d'écrire une formule concise du flux

$$\Phi(\vec{E}, r) = \int_r \vec{E}\,.\,d\vec{S}$$

et permet de définir des intégrales vectorielles de la forme $\int_r f\,d\vec{S}$:

Définition 66. *Soient D une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$, $r: D\to\mathbb{R}^3$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $f: r(D)\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On définit l'intégrale vectorielle surfacique de f par*

$$\int_r f\,d\vec{S} = \int_D f(r(u,v))\left(\frac{\partial r}{\partial u}\wedge\frac{\partial r}{\partial v}\right) du\,dv$$

Théorème 67. *Soient M une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ orientée de dimension 3, ∂M le bord orienté de M et $f: M\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*

$$\int_M \mathrm{grad}\, f\,dV = \int_{\partial M} f\,d\vec{S}$$

Comme d'habitude, $dV = dx\,dy\,dz$.

Démonstration. Soit $\vec{u}\in\mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} \left(\int_{\partial M} f\,d\vec{S}\right).\vec{u} &= \int_{\partial M} f\,\vec{u}\,.\,d\vec{S} \\ &= \int_M \mathrm{div}\,(f\,\vec{u})dV \end{aligned}$$

A la première étape on a fait entrer le vecteur $\vec{u}$ dans l'intégrale (le lecteur vérifiera que cela est correct). On fait ainsi apparaître le flux de $f\,\vec{u}$. La deuxième ligne est l'application de la formule d'Ostrogradski. La formule de Leibniz donne ici

$$\mathrm{div}\,(f\,\vec{u}) = \mathrm{grad}\, f\,.\,\vec{u} + f\,\mathrm{div}\,(\vec{u}) = \mathrm{grad}\, f\,.\,\vec{u}$$

d'où

$$\begin{aligned} \left(\int_{\partial M} f\,d\vec{S}\right).\vec{u} &= \int_M \mathrm{grad}\, f\,.\,\vec{u}\,dV \\ &= \left(\int_M \mathrm{grad}\, f\,dV\right).\vec{u} \end{aligned}$$

Le résultat découle alors du fait que cette égalité est vraie pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$. □

20.5 Formule du rotationnel

Théorème 68. *Soient M une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ orientée de dimension 3, ∂M le bord orienté de M et $F: M \to \mathbb{R}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*

$$\int_{\partial M} F \wedge \overrightarrow{dS} = -\int_M \operatorname{rot}(F)\, dV$$

Démonstration. C'est la même démarche que pour la formule du gradient. Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\left(\int_{\partial M} F \wedge \overrightarrow{dS}\right).\vec{u} = \int_{\partial M} \big(F \wedge \overrightarrow{dS}\big).\vec{u}$$

or

$$\begin{aligned} \big(F \wedge \overrightarrow{dS}\big).\vec{u} &= \big[F, \overrightarrow{dS}, \vec{u}\,\big] \\ &= -\big[F, \vec{u}, \overrightarrow{dS}\big] \\ &= -(F \wedge \vec{u}).\overrightarrow{dS} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \left(\int_{\partial M} F \wedge \overrightarrow{dS}\right).\vec{u} &= -\int_{\partial M} (F \wedge \vec{u}).\overrightarrow{dS} \\ &= -\int_M \operatorname{div}(F \wedge \vec{u})\, dV \\ &= -\int_M (\vec{u} \operatorname{rot} F - F \operatorname{rot} \vec{u})\, dV \\ &= -\int_M \vec{u} \operatorname{rot} F dV \\ &= -\left(\int_M \operatorname{rot} F dV\right).\vec{u} \end{aligned}$$

d'où le résultat (on a utilisé la formule d'Ostrogradski.) □

20.6 Formule de Kelvin

Théorème 69. *Soient Σ une surface orienté de $\mathbb{R}^3$, $\partial\Sigma$ le bord orienté de Σ et $f: \Sigma \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*

$$\int_{\partial\Sigma} f\, \overrightarrow{d\ell} = -\int_\Sigma \operatorname{grad} f \wedge \overrightarrow{dS}$$

Démonstration. La méthode est la même que pour les formules du gradient et du rotationnel. Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} \left(\int_{\partial\Sigma} f\, \overrightarrow{d\ell}\right).\vec{u} &= \int_{\partial\Sigma} f\, \vec{u}.\overrightarrow{d\ell} \\ &= c(f\, \vec{u}, \partial\Sigma) \\ &= \int_\Sigma \operatorname{rot}(f\, \vec{u}).\overrightarrow{dS} \\ &= \int_\Sigma (\operatorname{grad} f \wedge \vec{u} + f \operatorname{rot}(\vec{u})).\overrightarrow{dS} \\ &= \int_\Sigma (\operatorname{grad} f \wedge \vec{u}).\overrightarrow{dS} \\ &= -\int_\Sigma \big(\operatorname{grad} f \wedge \overrightarrow{dS}\big).\vec{u} \\ &= -\left(\int_\Sigma \operatorname{grad} f \wedge \overrightarrow{dS}\right).\vec{u} \end{aligned}$$

d'où le résultat (à la troisième ligne on a utilisé la formule de Stokes, et à la sixième nous sommes passés par le produit mixte $\left[\operatorname{grad} f, \vec{u}, \overrightarrow{dS}\right]$. □

21 Interprétations physique de la divergence et du laplacien

La formule de Stokes apporte une interprétation lumineuse de la divergence d'un champ. Soient E un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$, $m \in \mathbb{R}^3$ et B une boule élémentaire centrée en m. On note S le bord de B. Nous savons alors que le flux de E à travers S est l'intégrale de div E sur B. Ainsi $\operatorname{div} E$ en m mesure la quantité de E qui sort à travers S. Autrement dit, si $\operatorname{div} E(m) > 0$, on peut dire qu'il y a plus de E qui entre dans un voisinage de m que de E qui sort, si $\operatorname{div} E(m) < 0$, c'est exactement le contraire, et si $\operatorname{div} E(m) = 0$, il y a autant de E qui entre que de E qui sort. On dit que $\operatorname{div} E$ mesure localement la dispersion de E.

Figure 2. Divers cas où le divergeant est strictement positif. Le premier cas est $E(m) = \overrightarrow{Om}$. Dans ce cas $\operatorname{div} E = 3$. Le deuxième cas est celui où m est un point « source » de E.

Figure 3. Cas où $\operatorname{div} E(m) = 0$

Exemple 70. Prenons le cas du champ V des vitesses d'un fluide, voir exemple 41. Si en un point m le fluide est en phase de compression alors $\operatorname{div} V(m) > 0$. Si au contraire, le fluide est en phase de décompression, $\operatorname{div} V(m) < 0$. On dit que le fluide est incompressible si $\operatorname{div} V = 0$ en tout point (pas de compression, pas de décompression). C'est le cas de l'eau qui coule le long d'une rivière, par exemple. Il n'y a ni compression, ni décompression. Il s'ensuit que le flux des vitesses est le même à travers n'importe quelle section (puisqu'il est nul pour une surface fermée). Le lecteur l'a déjà remarqué en observant le courant là où le cours d'eau s'étrangle : on assiste à une accélération de l'eau.

Nous verrons plus loin que la divergence d'un champ magnétique B est toujours nul. Autrement dit, il n'existe pas de point source pour B.

Exemple 71. Revenons à un fluide. Nous avons vu que le volume sortant chaque seconde d'un volume M est égal au flux sortant de V à travers ∂M. Soit ρ la densité volumique du fluide de sorte que $\rho(m, t)$ soit la densité en m à l'instant t, exprimée en $\mathrm{kg}\,\mathrm{m}^3$. La quantité de fluide sortant de M est alors égale à

$$Q = \int_{\partial M} \rho V . \overrightarrow{dS}$$

c'est à dire à

$$Q = \int_M \operatorname{div}(\rho V)\, dx dy dz$$

Il est clair par ailleurs que cette même quantité peut s'exprimer à l'aide des variations de ρ dans le temps :

$$Q = -\int_M \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx dy dz$$

On obtient alors par identification

$$\int_M \operatorname{div}(\rho V)\, dx dy dz = -\int_M \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx dy dz$$

Ceci étant vrai pour tout volume M, on en déduit l'identité

$$\operatorname{div}(\rho V) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

qu'on appelle loi de conservation (ou de continuité) des fluides.

Exemple 72. Reprenons l'exemple 42 du courant électrique. On note ρ la densité de charges de sorte que $\rho(m,t)$ soit la densité en m à l'instant t, exprimée en $C\,\mathrm{m}^{-3}$ (coulombs par mètres cubes). On rappelle que j est la densité de courant. On montre de la même manière que

$$\operatorname{div} j = -\dot{\rho}$$

C'est la loi de conservation des charges. La différence fondamentale entre la densité de courant j et le champ ρV associé à un fluide est que le premier dérive d'un potentiel scalaire, contrairement au second. On a en effet

$$j = -\sigma \operatorname{grad} V$$

où V est le potentiel électrique et σ est la conductivité (mesurée en $\Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$), c'est à dire l'inverse de la résistivité. On en déduit la loi d'Ohm :

$$\sigma \Delta V = \dot{\rho}$$

Exemple 73. Reprenons l'exemple 43 de diffusion d'une matière dans un fluide. Notons c la densité de concentration de cette matière en diffusion de sorte que $c(m,t)$ soit la densité de concentration en m à l'instant t, exprimée en nombre de moles par mètres cubes. On rappelle que j est la densité de diffusion. On montre ici aussi que

$$\operatorname{div} j = -\dot{c}$$

C'est la loi de conservation de la matière. Ici aussi j dérive d'un potentiel scalaire :

$$j = -D \operatorname{grad} c$$

où D est le coefficient de diffusion (diffusivité) mesuré en $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}$). On en déduit la loi de Fick :

$$D \Delta c = \dot{c}$$

Exemple 74. Reprenons l'exemple 44 de propagation de la chaleur. Notons q la densité de chaleur de sorte que $q(m,t)$ soit la densité en m à l'instant t, exprimée en joules par mètres cubes. On rappelle que j est la densité de flux thermique. On montre ici aussi que

$$\operatorname{div} j = -\dot{q}$$

C'est la loi de conservation de la chaleur. Ici aussi j dérive d'un potentiel :

$$j = -\lambda \operatorname{grad} T$$

où T est la température et λ la conductivité thermique mesurée en $W\,\mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{K}^{-1}$. On en déduit la loi de Fourier

$$\lambda \Delta T = \dot{q}$$

et puisque q s'écrit

$$q = \rho C T$$

où ρ et C sont des constantes : ρ est la masse volumique et C la chaleur massique mesurée en $\mathrm{J\,kg}^{-1}\,\mathrm{K}^{-1}$ du milieu dans lequel la chaleur se propage, alors la loi de Fourier s'écrit

$$\lambda \Delta T = \rho C \dot{T}$$

x x x x x x x x x
Nous ajouterons un mot sur le laplacien ici même. (en projet)
x x x x x x x

22 Interprétation physique du rotationnel

Nous dirons deux ou trois mots sur le sujet (en projet)

23 Surfaces cylindriques

On rencontre souvent des cylindres dans les exercices d'analyse vectorielle (et surtout dans des exemples importants de la physique), il est donc important de savoir calculer des intégrales et des flux à travers cette surface. Considérons par exemple la paramétrisation

$$\begin{array}{rcl} r \ : \ D = [0, 2\pi] \times [0, h] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\theta, z) & \longmapsto & (R\cos\theta, R\sin\theta, z) \end{array}$$

Ici h désigne la hauteur et R le rayon de la base. On a

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta \\ R\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial r}{\partial z} = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ -R\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

La norme de ce vecteur étant égale à R, nous venons de prouver que l'élément de surface le long du « cylindre » r est

$$dS = R d\theta dz$$

que les physiciens nomment abusivement « élément de surface en coordonnées cylindriques à rayon constant », et que l'on peut interpréter géométriquement comme l'aire d'un rectangle élémentaire, si on considère $d\theta$ et dz comme des petites variations de θ et z, voir figure ci-dessous.

Figure 4. L'élément de surface est approximativement un rectangle de dimensions $R d\theta$ et dz.

Applications :

- Si $f: r(D) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, son intégrale surfacique sur r est

$$\int_r f dS = \int_D f(r(\theta, z))\, R d\theta dz = R \int_0^h \int_0^{2\pi} f(R\cos\theta, R\sin\theta, z)\, d\theta dz$$

- Si $E: r(D) \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs continu de composantes (a, b, c), alors son flux à travers r est

$$\Phi(E, r) = \int_r E.\overrightarrow{dS} = R \int_D (a(R\cos\theta, R\sin\theta, z)\cos\theta - b(R\cos\theta, R\sin\theta, z)\sin\theta)\, d\theta dz$$

Il arrive que l'on ait à intégrer une fonction sur un cylindre solide. On utilise alors le changement de variable :

$$\begin{array}{rcl} v \ : \ D = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, h] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, z) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \end{array}$$

On note X, Y, Z les composantes de v. La formule du changement de variable donne

$$\int_{v(D)} f(x, y, z)\, dx dy dz = \int_D f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, |Jv(r, \theta, z)|\, dr d\theta dz$$

où le jacobien vaut

$$Jv(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial \theta} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial r} & \frac{\partial Z}{\partial \theta} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Ainsi

$$\int_{v(D)} f(x,y,z)\,dx dy dz = \int_D f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r dr d\theta dz$$

Les physiciens disent que l'élément de volume en coordonnées cylindriques est $r dr d\theta dz$.

24 Surfaces sphériques

Les sphères et les demi-sphères sont des exemples aussi importants que le cylindre. Nous allons donc apprendre à intégrer sur de telles surfaces. Considérons par exemple la paramétrisation

$$\begin{array}{rcl} r\ :\ D=[0,2\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\theta,\varphi) & \longmapsto & (R\cos\theta\cos\varphi, R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\varphi) \end{array}$$

C'est la paramétrisation de la sphère de centre O et de rayon R. On a

$$\frac{\partial r}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{\partial r}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -R\cos\theta\sin\varphi \\ -R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\varphi \end{pmatrix}$$

d'où

$$\frac{\partial r}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial r}{\partial z} = \begin{pmatrix} R^2\cos\theta\cos^2\varphi \\ R^2\sin\theta\cos^2\varphi \\ R^2\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}$$

La norme de ce vecteur est $R\cos\varphi$ (le cosinus de φ est toujours positif) d'où

$$dS = R\cos\varphi d\theta d\varphi$$

Les physiciens nomment cette quantité « élément de surface en coordonnées sphériques à rayon constant ». On peut à l'instar du cylindre, illustrer cet élément :

Figure 5. L'élément de surface est approximativement un rectangle de dimensions xxx et xxx.

Applications :

- Si $f: r(D)\to\mathbb{R}$ est continue, son intégrale surfacique sur r est

$$\int_r f dS = R\int_{-\pi/2}^{-\pi/2}\cos\varphi\left(\int_0^{2\pi} f(R\cos\theta, R\sin\theta, z)\,d\theta\right)d\varphi$$

- Si $E\colon r(D)\rightarrow\mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs continu de composantes (a,b,c), alors son flux à travers r est $R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} g(\theta,\varphi)\,d\theta d\varphi$ où

$$\begin{aligned} g(\theta,\varphi) \;=\;& a(R\cos\theta\cos\varphi, R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\varphi)\cos\theta\cos^2\varphi\\ &+\; b(R\cos\theta\cos\varphi, R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\varphi)\sin\theta\cos^2\varphi\\ &+\; c(R\cos\theta\cos\varphi, R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\varphi)\cos\theta\sin\varphi\end{aligned}$$

  Heureusement, dans la plupart des exercices l'expression de $g(\theta,\varphi)$ est simple.

Pour intégrer sur une boule, on utilise le changement de variable :

$$\begin{aligned} v\ :\ D=[0,R]\times[0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi/2] &\longrightarrow \mathbb{R}^3\\ (r,\theta,\varphi) &\longmapsto (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)\end{aligned}$$

On note X,Y,Z les composantes de v. Le jacobien de v est

$$Jv(r,\theta,\varphi)=r^2\cos\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

La formule du changement de variable donne

$$\int_{v(D)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_D f(v(r,\theta,\varphi))\,r^2\cos\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

25 Potentiel scalaire

Définition 75. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et F un champ de vecteurs sur U. On dit que F dérive d'un potentiel scalaire s'il existe une fonction $f\colon U\rightarrow\mathbb{R}$ telle que $F=\operatorname{grad} f$.*

Proposition 76. *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^3$ et F un champ de vecteurs sur U.*

1. *Si F dérive d'un potentiel scalaire alors son rotationnel est nul*
2. *Si f_1 et f_2 sont des portentiels scalaires de F alors ils diffèrent d'une constante.*

Démonstration. L'item 1 vient du fait que $\operatorname{rot}\circ\operatorname{grad}=0$ (pas besoin de la connexité de U). Pour l'item 2 : de $\operatorname{grad} f_1=\operatorname{grad} f_2$ on déduit $\operatorname{grad}(f_1-f_2)=0$, c'est à dire $D(f_1-f_2)=0$. La connexité de U implique que f_1-f_2 est constante. □

Théorème 77. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et F un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Si le rotationnel de F est nul, alors localement F est un gradient, autrement dit F dérive localement d'un portentiel scalaire.*

Ceci signifie que pour tout $m\in U$, il existe un voisinage V de m contenu dans U et $f\colon V\rightarrow\mathbb{R}$ tels que $F_{|V}=\operatorname{grad} f$.

Démonstration. On suppose que U contient l'origine O et on montre que dans un voisinage de O, le champ F est un gradient, le cas général découle alors par translation. Soit $r>0$ tel que la boule ouverte B de centre O et de rayon r soit contenue dans U. On note (P,Q,R) les fonctions composantes de F, on définit la fonction

$$\begin{aligned} f\ :\quad B &\longrightarrow \mathbb{R}\\ m=(x,y,z) &\longmapsto \int_0^1 \vec{F}(tm).\vec{m}\,dt=\int_0^1 (P(tm)\,x+Q(tm)\,y+R(tm)\,z)\,dt\end{aligned}$$

et on montre que $\operatorname{grad} f=F$. D'après le théorème de la dérivation sous le signe somme, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^1 (P(tm)\,x+Q(tm)\,y+R(tm)\,z)\,dt\right)\\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}(P(tm)\,x+Q(tm)\,y+R(tm)\,z)\,dt\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(Q(tm)) &= \frac{\partial}{\partial x}(Q(tx,ty,tz))\\ &= t\frac{\partial Q}{\partial x}(tx,ty,tz) \qquad = t\frac{\partial Q}{\partial x}(tm)\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x}(R(tm)) = t\frac{\partial R}{\partial x}(tm)$$

On a aussi

$$\frac{\partial}{\partial x}(P(tm)\,x) = t\frac{\partial P}{\partial x}(tm)\,x + P(tm)$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \int_0^1 \left(P(tm) + t\left(\frac{\partial P}{\partial x}(tm)\,x + \frac{\partial Q}{\partial x}(tm)\,y + \frac{\partial R}{\partial x}(tm)\,z\right)\right)dt$$

Or le rotationnel de F étant nul on a $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ et $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$, d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \int_0^1 \left(P(tm) + t\left(\frac{\partial P}{\partial x}(tm)\,x + \frac{\partial P}{\partial y}(tm)\,y + \frac{\partial P}{\partial z}(tm)\,z\right)\right)dt\\ &= \int_0^1 \left(P(tm) + t\frac{d}{dt}(P(tm))\right)dt\\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(tP(tm))\,dt\\ &= P(m)\end{aligned}$$

Pour comprendre le passage de la première à la deuxième ligne on introduit la fonction

$$\alpha : t \longmapsto tm = (tx, ty, tz)$$

On a alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(P(tm))\,h &= (P\circ\alpha)'(t)\,h\\ &= (P'(\alpha(t))\circ\alpha'(t))(h)\\ &= P'(tm)(\alpha'(t)(h))\\ &= P'(tm)(hm)\\ &= h\left(\frac{\partial P}{\partial x}(tm)\,x + \frac{\partial P}{\partial y}(tm)\,y + \frac{\partial P}{\partial z}(tm)\,z\right)\end{aligned}$$

d'où le résultat. On montre de la même manière que $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = R$. □

26 Potentiel vecteur

Définition 78. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et G un champ de vecteurs sur U. On dit que G dérive d'un portentiel vecteur s'il existe un champ vectoriel $F : U \to \mathbb{R}^3$ tel que $G = \operatorname{rot} F$.*

Proposition 79. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et G un champ de vecteurs sur U.*

1. *Si G dérive d'un potentiel vecteur alors sa divergence est nulle.*
2. *Si F_1 et F_2 sont des portentiels vecteurs de G, ils diffèrent localement d'un gradient.*

Démonstration. L'item 1 vient du fait que $\operatorname{div}\circ\operatorname{rot} = 0$. Pour l'item 2 : de $\operatorname{rot} F_1 = \operatorname{rot} F_2$ on déduit $\operatorname{rot}(F_1 - F_2) = 0$, ainsi d'après le théorème 77, $F_1 - F_2$ est localement un grandient. □

Théorème 80. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et V un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ de divergence nulle. Alors localement V est un rotationnel, autrement dit V dérive localement d'un potentiel vecteur.*

Démonstration. On suppose que U contient O et on montre que dans un voisinage de O le champ V est un rotationnel. Le reste découle par translation. Soit $r>0$ tel que la boule ouverte B de centre O et de rayon r soit contenue dans U. On note (A,B,C) les fonctions composantes de V, on définit le champ

$$\begin{array}{rccc} F\ : & B & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & m=(x,y,z) & \longmapsto & \int_0^1 tV(tm)\wedge m\,dt \end{array}$$

et on montre que $\operatorname{rot} F = V$. Les composantes de $tV(tm)\wedge m$ sont

$$tV(tm)\wedge m = \begin{pmatrix} t\,(zB(tm)-yC(tm)) \\ t\,(xC(tm)-zA(tm)) \\ t\,(yA(tm)-xB(tm)) \end{pmatrix}$$

ainsi celles de F sont

$$F = \begin{pmatrix} P = \int_0^1 t\,(zB(tm)-yC(tm))\,dt \\ Q = \int_0^1 t\,(xC(tm)-zA(tm))\,dt \\ R = \int_0^1 t\,(yA(tm)-xB(tm))\,dt \end{pmatrix}$$

et on rappelle que

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)k$$

Montrons que

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z} = A$$

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^1 t\,(yA(tm)-xB(tm))\,dt\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\int_0^1 t\,(xC(tm)-zA(tm))\,dt\right) \\ &= \int_0^1 t\left(A(tm)+ty\frac{\partial A}{\partial y}(tm)-tx\frac{\partial B}{\partial y}(tm)-tx\frac{\partial C}{\partial z}(tm)+A(tm)+tz\frac{\partial A}{\partial z}(tm)\right)dt \end{aligned}$$

La partie entre parenthèses vaut

$$\begin{aligned} (\ldots) &= 2A(tm)+t\left(y\frac{\partial A}{\partial y}(tm)+z\frac{\partial A}{\partial z}(tm)\right)-tx\left(\frac{\partial B}{\partial y}(tm)+\frac{\partial C}{\partial z}(tm)\right) \\ &= 2A(tm)+t\left(y\frac{\partial A}{\partial y}(tm)+z\frac{\partial A}{\partial z}(tm)\right)-tx\left(-\frac{\partial A}{\partial x}(tm)\right) \\ &= 2A(tm)+t\left(x\frac{\partial A}{\partial x}(tm)+y\frac{\partial A}{\partial y}(tm)+z\frac{\partial A}{\partial z}(tm)\right) \\ &= 2A(tm)+t\,(A\circ\alpha)'(t) \end{aligned}$$

La deuxième ligne est justifiée par le fait que $\operatorname{div} G = 0$, et la dernière par le calcul différentiel déjà effectué à la démonstration du théorème 77. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z} &= \int_0^1 2t\,(A\circ\alpha)(t)+t^2\,(A\circ\alpha)'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\,(t^2\,(A\circ\alpha))\,dt \\ &= A(m) \end{aligned}$$

On montre de la même façon que $\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=B$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=C$. □

27 Application : les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell peuvent être considérées comme les postulats de l'électromagnétisme. Ces équations traduisent le comportement des champs électrique et magnétique. Nous noterons

- $m=(x,y,z)$ un point de l'espace physique identifié à $\mathbb{R}^3$,

- t un instant donné (on suppose qu'un chronomètre a été déclenché à l'instant zéro),
- $\rho(m,t)$ la densité volumique de charge en m à l'instant t,
- $j(m,t)$ le vecteur densité de courant en m à l'instant t,
- $E(m,t)$ le champ électrique en m à l'instant t,
- $B(m,t)$ le champ magnétique en m à l'instant t (les physiciens utilisent un pseudo-vecteur),
- ε_0 la permitivité diélectrique du vide,
- μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

Rappelons les relations élémentaires permettant de comprendre à quoi correspondent ces quantités :

1. Force et champ E :
$$F(m) = qE(m)$$
$F(m)$ est la force dûe au champ E s'exerçant sur une particule située en $m = (x,y,z)$ dont la charge électrique est notée q.
2. Charge totale : la charge électrique d'un volume M est égale à
$$Q(M) = \int_M \rho dxdydz$$
3. Intensité : si Σ est une surface (penser à la section d'un fil électrique par exemple), l'intensité de courant I traversant Σ est égale à
$$I = \int_\Sigma j.\overrightarrow{dS} = \Phi(j,\Sigma)$$
4. Travail et tension : la tension électrique U est égale au travail W de la force électrique sur une particule chargée, divisé par la valeur q de la charge:
$$U = \frac{W}{q}$$

Les équations de Maxwell sont :

$$\begin{array}{lll} 1) & \text{Maxwell-Gauss} & : \operatorname{div} E = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ 2) & \text{Maxwell-Thomson} & : \operatorname{div} B = 0 \\ 3) & \text{Maxwell-Faraday} & : \operatorname{rot} E = -\dfrac{\partial B}{\partial t} \\ 4) & \text{Maxwell-Ampère} & : \dfrac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} B = j + \varepsilon_0 \dfrac{\partial E}{\partial t} \end{array}$$

27.1 Equation de Maxwell-Gauss

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Nous allons voir deux conséquences de l'équation de Maxwell-Gauss. Soit M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. On oriente ∂M grâce à la normale sortante. Alors, d'après la formule d'Ostrogradski, on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} E.\overrightarrow{dS} &= \int_M \operatorname{div} E dV \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_M \rho(x,y,z)\, dxdydz \\ &= \frac{Q(M)}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Nous venons de prouver le

Théorème 81. *Théorème de Gauss. Le flux éléctrique sortant d'une surface fermée ∂M est égal à la charge électrique totale contenue à l'intérieur de cette surface divisée par ε_0.*

On déduit aussi le

Théorème 82. *Loi de Coulomb. Le champ électrique crée en le point* $m=(x,y,z)$ *par une charge ponctuelle* q *située à l'origine est*

$$E(m)=\frac{q}{4\pi r^2\varepsilon_0}\,e_r$$

où $r=Om$ *et* $e_r=\frac{\overrightarrow{Om}}{Om}$.

Démonstration. La symétrie sphérique implique que E s'écrit

$$E(m)=f(r)\,e_r$$

où $r=r(m)=Om$. Autrement dit E est radial et ne dépend que de la distance à O. Soit S la sphère de centre O et de rayon r. D'après le théorème de Gauss, le flux sortant à travers S est

$$\int_S E.\overrightarrow{dS}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

Nous savons par ailleurs que $dS=dSe_r$, d'où

$$\begin{aligned}\int_S E.\overrightarrow{dS} &= \int_S (f(r)\,e_r).(dSe_r)\\ &= \int_S f(r)\,dS\\ &= f(r)\int_S dS\\ &= f(r)\times 4\pi r^2\end{aligned}$$

On en déduit le résultat par identification. □

27.2 Equation de Maxwell-Thomson

$$\operatorname{div} B=0$$

La divergence de B étant nulle, on a forcément $\Phi(B,\partial M)=0$, d'après la formule d'Ostrogradski. Autrement dit : il y a autant de flux entrant que de flux sortant à travers une surface fermée. Ainsi, il ne peut pas y avoir de sources ponctuelle pour le champ B, contrairement au champ électrique. Ceci exclue l'existence d'un monopôle magnétique. D'ailleurs nous savons tous qu'un aimant oridinaire possède deux pôles (un nord et un sud) et que le fait de le couper en deux crée deux nouveaux aimants avec deux pôles chacun.

On déduit aussi de cette équation que B dérive d'un champ de vecteurs :

$$B=\operatorname{rot} A$$

Nous savons que A n'est pas unique et que tout potentiel vectoriel de B s'écrit $A+\operatorname{grad} f$, où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

27.3 Equation de Maxwell-Faraday

$$\operatorname{rot} E=-\frac{\partial B}{\partial t}$$

Si on remplace B par $\operatorname{rot} A$, cette équation s'écrit

$$\operatorname{rot} E=-\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} A$$

et puisque les opérateurs $\frac{\partial}{\partial t}$ et rot commutent (le lecteur devra le vérifier), cela équivaut à

$$\operatorname{rot}\left(E+\frac{\partial A}{\partial t}\right)=0$$

d'où l'on déduit l'existence d'un potentiel scalaire V tel que

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{grad} V$$

Proposition 83. *Expression de E. Si A est un potentiel vectoriel du champ magnétique, alors il existe un potentiel scalaire V tel que*

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{grad} V$$

Cette formule montre que la variation du champ magnétique crée du champ électrique.

Proposition 84. *Si on remplace A par $A + \operatorname{grad} f$, il faut remplacer V par $V + \frac{\partial f}{\partial t}$ dans la proposition 83.*

Démonstration. Posons

$$A' = A + \operatorname{grad} f$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday on a

$$\operatorname{rot}\left(E + \frac{\partial A'}{\partial t}\right) = 0$$

c'est à dire

$$\operatorname{rot}\left(E + \frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\right) = 0$$

d'où l'existence d'un potentiel scalaire W tel que

$$\operatorname{grad} W = E + \frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

c'est à dire

$$\operatorname{grad} W = \operatorname{grad} V + \operatorname{grad}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

d'où

$$W = V + \frac{\partial f}{\partial t} + \text{constante}$$

□

Lorsque l'on change de potentiel A, on dit que l'on change de jauge :

$$\begin{aligned} A &\rightsquigarrow A + \operatorname{grad} f \\ V &\rightsquigarrow V + \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

Il existe une théorie de jauge. Les physiciens choisissent souvent le potentiel A vérifiant la condition

$$\operatorname{div} A = 0$$

Cette équation est appelée contrainte de jauge de Coulomb. Il y a d'autres contraintes de jauge connues, comme celle de Lorenz, par exemple (ne pas confondre avec Lorentz).

Proposition 85. *Effectuer le changement de jauge de Coulomb équivaut à chercher f telle que*

$$\Delta f = -\operatorname{div} A$$

Cette équation s'appelle : « équation de Poisson du potentiel vecteur ».

Démonstration. On suppose que A est un potentiel vectoriel de B. On cherche à remplacer A par $A' = A + \operatorname{grad} f$ vérifiant la contrainte de Coulomb, à savoir $\operatorname{div} A' = 0$. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A' &= \operatorname{div}(A + \operatorname{grad} f) \\ &= \operatorname{div} A + \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \\ &= \operatorname{div} A + \Delta f \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Nous savons que toute particule de charge q placée dans un champ électrique E est soumise à la force

$$F(m) = qE(m)$$

où $m = (x, y, z)$ est la position. Le travail de cette force le long d'un chemin γ est

$$\begin{aligned} W &= \int_\gamma F.\vec{d\ell} \\ &= q\int_\gamma E.\vec{d\ell} \\ &= q\int_\Sigma \operatorname{rot} E.\overrightarrow{dS} \\ &= -q\int_\Sigma \frac{\partial B}{\partial t}.\overrightarrow{dS} \\ &= -q\frac{d}{dt}\int_\Sigma B.\overrightarrow{dS} \;=\; -q\frac{d\Phi(B,\Sigma)}{dt} \end{aligned}$$

où Σ est une surface bordée par γ et $\Phi(B, \Sigma)$ est le flux de B à travers cette surface. Or nous savons que

$$W = qU$$

si U désigne la différence de potentiel. Ainsi la variation de B dans le temps équivaut à une différence de potentiel égale à $-\frac{d\Phi(B,\Sigma)}{dt}$, ou si l'on préfère :

Théorème 86. *Loi de Faraday. La variation du champ magnétique engendre la force électromotrice*

$$U = -\frac{d\Phi(B,\Sigma)}{dt}$$

Cette loi explique que la rotation d'une dynamo engendre un courant électrique.

Remarque 87. On invite le lecteur à justifier la troisième et quatrième égalité du calcul de W.

27.4 Equation de Maxwell-Ampère

$$\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot} B = j + \varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$$

Cette équation permet de trouver une expression de la circulation de B le long du bord $\partial\Sigma$ d'une surface Σ :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} B.\vec{d\ell} &= \int_\Sigma \operatorname{rot} B.\overrightarrow{dS} \\ &= \int_\Sigma \left(\mu_0\, j + \mu_0\,\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\right).\overrightarrow{dS} \\ &= \mu_0\int_\Sigma j.\overrightarrow{dS} + \mu_0\,\varepsilon_0\int_\Sigma \frac{\partial E}{\partial t}.\overrightarrow{dS} \\ &= \mu_0\, I + \mu_0\,\varepsilon_0\frac{d\Phi(E,\Sigma)}{dt} \end{aligned}$$

où I est l'intensité.

Proposition 88. *La circulation du champ magnétique B le long de $\partial\Sigma$ est*

$$c(B, \partial\Sigma) = \mu_0\, I + \mu_0\,\varepsilon_0\frac{d\Phi(E,\Sigma)}{dt}$$

Dans le cas particulier où le champ électrique est constant dans le temps, on retrouve la loi d'Ampère :

Théorème 89. *Loi d'Ampère. La circulation du champ magnétique B le long de $\partial\Sigma$ dans un champ électrique constant dans le temps est*

$$c(B, \partial\Sigma) = \mu_0 I$$

La loi de Biot-Savart découle de ce résultat :

Théorème 90. *Loi de Biot-Savart. Soit d un fil électrique rectiligne, infiniment long et traversé par une intensité électrique constante I. Si m est un point de l'espace, on note $\mathcal{P}_m$ le plan orthogonal à d par m, H_m l'intersection de $\mathcal{P}_m$ et d, k_m le vecteur allant de H_m à m, et τ_m le vecteur unitaire tel que $\left(k_m, \tau_m, \vec{I}\right)$ soit une base orthogonale directe. Il est clair que τ_m est porté par $\mathcal{P}_m$ et est orthogonal à k_m. Alors le champ magnétique B généré par ce fil est donné par*

$$B(m) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_m} \vec{\tau}_m$$

où r_m désigne la norme de k_m, c'est à dire la distance entre m et d.

Figure 6.

Démonstration. On supposera le fait que B_m est colinéaire à τ_m :

$$B_m = \lambda(m)\, \tau_m$$

(ce résultat fut découvert expérimentalement par Oersted en 1819.) Fixons m. Soit $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la paramétrisation du cercle du plan $\mathcal{P}_m$ de centre H_m passant par m. Son rayon est r_m. On remarquera que

$$\dot{\gamma}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|\, \tau_{\gamma(t)}$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_\gamma B.\vec{d\ell} &= \int_0^1 B_{\gamma(t)}.\dot{\gamma}(t)\, dt \\ &= \int_0^1 \lambda(\gamma(t))\|\dot{\gamma}(t)\|\, dt \end{aligned}$$

Etant données les symétries de d, il est clair que $\lambda(m)$ ne varie pas le long de γ :

$$\lambda(\gamma(t)) = f(r_m)$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_\gamma B.\vec{d\ell} &= f(r_m) \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt \\ &= f(r_m) \times 2\pi r_m \end{aligned}$$

Or nous savons par la loi d'Ampère que $\int_\gamma B.\vec{d\ell} = \mu_0 I$. On obtient alors $f(r_m)$ par identification. □

La loi de conservation de la charge peut aussi être obtenue à partir des équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Gauss :

Théorème 91. *Loi de conservation de la charge. Si j est le vecteur densité de courant et ρ la densité volumique de charge alors*

$$\operatorname{div} j + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

Démonstration. En prenant la divergence des membres de l'équation de Maxwell-Ampère on obtient

$$0 = \operatorname{div} j + \varepsilon_0 \frac{\partial(\operatorname{divE})}{\partial t}$$

où $\operatorname{div} E = \rho/\varepsilon_0$, d'après l'équation de Maxwell-Gauss. □

Nous montrons une autre relation dans le cas où le champ électrique ne varie pas :

Proposition 92. *Soient A le potentiel vectoriel du champ magnétique correspondant à la jauge de Coulomb et j la densité de courant. Si le champ électrique est constant dans le temps alors*

$$\vec{\Delta}\, A + \mu_0\, j = 0$$

Démonstration. Dans ce cas particulier l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} B = j$$

où $B = \operatorname{rot} A$, d'où

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} A) = j$$

or

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} A) &= \operatorname{grad}(\operatorname{div} A) - \vec{\Delta}\, A \\ &= -\vec{\Delta}\, A \end{aligned}$$

puisque nous avons choisi A tel que $\operatorname{div} A = 0$. □

// Ce texte sera mis à jour de temps en temps. Nous espérons ajouter une section consacrée à des exercices d'application //